**Тихонов Михаил, 511 группа**

**Обоснование закона всемирного тяготения**

Движение небесных тел интересовало ученых задолго до Ньютона. Выдвигались различные гипотезы, от совершенно фантастических, до достаточно близких к реальности. Важным среди таких изысканий представляется находка Иоганна Кеплера. Изучая движения небесных тел, он первым получил специфику их движения и сформулировал данные наблюдения в виде 3-х законов. Но предполагалось, что движение небесных тел невозможно описать земными законами механики.

 Именно Ньютон выдвинул предположение о том, что законы движения одинаковы как на Земле, так и в небесных сферах. Это и позволило ему получить математическое обоснование закона всемирного тяготения.

Для движения небесных тел должны выполняться законы Кеплера:

1. Небесные тела движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.
2. За равные промежутки времени радиус-векторы небесных тел покрывают равные площади.
3. Кубы больших осей орбит небесных тел пропорциональны квадратам периодов их обращения.

Сначала рассмотрим движения, потенциальная энергия в которых является однородной функцией координат и найдем степень однородности для того, чтобы функция удовлетворяла 3-му закону Кеплера.

Чтобы потенциальная энергия была однородной, необходимо, чтобы выполнялось $U\left(λr\_{1}-λr\_{2},…,λr\_{N-1}-λr\_{N}\right)= λ^{k}U\left(r\_{1}-r\_{2},…,r\_{N-1}-r\_{N}\right)$, где $λ-$некоторая константа, а $k-$степень однородности.

Произведем замены вида $r\_{i}=λρ\_{i} и t=μτ, i=1,…N$. Эти замены означают изменения всех координат частиц системы в одинаковое число раз, или, другими словами, переход к другим геометрически подобным траекториям. Подставим в выражение для полной энергии $E(r\_{1},…,r\_{N})$замкнутой системы материальных точек:



Можно заметить, что получено выражение $E\left(r\_{1},…,r\_{N}\right)= λ^{k}E\left(ρ\_{1},…,ρ\right)$. Это значит, что уравнения движения имеют один и тот же вид в старых и новых переменных. Посмотрим, как относятся времена движения по этим траекториям:. По 3 закону Кеплера квадраты отношения периодов пропорциональны кубам линейных размеров траекторий, то есть в данном случае: 

Таким образом, согласно закону Кеплера потенциальная энергия является однородной функцией степени -1.

Учитывая полученную структуру потенциальной энергии получим закон тяготения. Для этого рассмотрим задачу двух тел. Пусть дана замкнутая механическая система, состоящая из двух материальных точек с массами $m\_{1} и m\_{2}$, находящиеся в однородном поле. Потенциальная энергия этих тел, в силу однородности поля, зависит только от их взаимного расположения. Полная энергия системы может быть записана в следующем виде:

**

Поместив начало отсчета в центр инерции системы, получим , то есть вся система покоится как целое.  - вектор взаимного расположения точек системы. Выразим через него  и : Подставим полученные вектора в выражение для полной энергии:



Таким образом получено выражение для полной энергии материальной точки с массой  и скоростью , которая движется в поле с потенциальной энергией U(r). Получается, что задача о взаимодействии двух тел сводится к задаче о движении массы во внешнем центральном поле. Поскольку поле центрально, то вектор M момента определен относительно центра поля и траектория движения тела постоянно находится в одной плоскости, перпендикулярной вектору M.

Введем полярные координаты в этой плоскости с началом в центре поля и запишем в них полную энергию системы:

 

Обозначим за ds дифференциал площади сектора, образованного радиус-вектором движущейся точки и элементом дуги траектории, пройденной этим вектором. Найдем пройденную радиус-вектором площадь:

Получили, что площадь пропорциональна времени, то есть в точности 2-й закон Кеплера.

Вспомним, что из 3-го закона Кеплера было получено значение степени однородности потенциальной энергии. Учитывая это, потенциальная энергия представима в виде . Будем использовать величину такую что . Тогда .Получается, если поменять массы местами, то потенциальная энергия не изменится и коэффициент c и функция g – симметричны:

Если взять в качестве функции потенциальной энергии однородную, то есть изменение массы одного из тел в  раз приводит к изменению силы взаимного притяжения в те жераз, то:



Это значит, что  не зависит от , не зависит от , а в силу симметрии и от . То есть . Экспериментально было установлено, что . Эта постоянная характеризует силу притяжения 2-х единичных масс, помещенных на единичном расстоянии друг от друга.

Теперь можно сформулировать **закон всемирного тяготения**: две материальные точки, имеющие массы и , помещенные на расстояние друг от друга, притягивают друг друга с силой, прямо пропорциональной произведению масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:







**Доказательство теоремы о продуктивности матрицы в модели Леонтьева**

Рассмотрим экономику, в которой производство разделено на n отраслей. Каждая отрасль производит свой уникальный тип продукта. В процессе производства отраслям необходимо использовать некоторые продукты других отраслей. Предположим, что технология производства не меняется в течение некоторого времени.

 Рассмотрим эту экономическую систему в некоторый момент времени t:

$a\_{11}$ … $a\_{1n}$ $c\_{1}$

… … … …

$a\_{n1}$ … $a\_{nn}$ $c\_{n}$

$v\_{1}$ … $v\_{n}$

Где $v\_{i}$ – общий объем продукции, произведенный i-й отраслью, $c\_{i}$ - объем продукции i-й отрасли, который не был использован для производства товаров других отраслей и $a\_{ij}$ - объем продукции i-й отрасли, который был использован в производстве j-й отраслью.

Используя полученную таблицу можно получить уравнение баланса:



 - коэффициент прямых затрат, то есть количество продукта отрасли i, которое необходимо использовать отрасли j для производства одной единицы продукции.

Матрица А = (), составленная из коэффициентов прямых затрат называется технологической матрицей. Пусть  - вектор валового выпуска. Предположим, что производство линейно, то есть в процессе выпуска вектора х будет израсходовано продукции i-й отрасли. Кроме того, задан вектор конечного потребления c, показывающий, какой объем продукции должен быть выделен каждой отраслью на продажу. Требуется найти положительный вектор валового выпуска, который при заданной технологической матрице A удовлетворял конечному потреблению. Другими словами, необходимо решить уравнение x – Ax = c, x ≥ 0, при заданных матрице A и векторе c. Эта система называется моделью Леонтьева. Если для любого неотрицательного вектора конечного спроса существует решение этой системы, то модель Леонтьева и соответствующая ей матрица A называются продуктивными.

Для матрицы A введем величину $λ\_{A}$, равную наибольшему положительному собственному значению матрицы. Ему соответствует собственный вектор $x\_{A}$.

Теорема Фробениуса-Перрона Пусть A – неразложимая неотрицательная матрица, то есть такая, что одновременной перестановкой строк и столбцов ее нельзя привести к виду $\left(\begin{matrix}A\_{1}&A\_{2}\\0&A\_{3}\end{matrix}\right)$ и $\left(Ax, x\right)\geq 0, ∀x\geq 0.$ Тогда:

1. Она имеет $λ\_{A}$.
2. $λ\_{A}$ соответствует собственный вектор $x\_{A}>0$.
3. Найдется такой вектор $p\_{A}>0$, что $p\_{A}A= λ\_{A}p\_{A}$

Необходимое и достаточное условие продуктивности модели Леонтьева Модель Леонтьева с технологической матрицей A продуктивна тогда и только тогда, когда $λ\_{A}<1$.

Необходимость: Предположим, что модель Леонтьева продуктивна. В качестве вектора конечного спроса c возьмем произвольный положительный вектор. Так как модель продуктивна, то найдется такой неотрицательный вектор x, что будет выполнено равенство x – Ax = c, откуда x > Ax. Умножим полученное неравенство на вектор $p\_{A}>0$ из теоремы Фробениуса-Перрона. Получаем $(x, p\_{A}) > λ\_{A}(x, p\_{A})$. Так как $\left(x, p\_{A}\right)>0$, то $λ\_{A}$ должно быть меньше 1.

Достаточность: Поскольку $λ\_{A}<1$, из определения $λ\_{A}$ следует, что все собственные значения матрицы A не будут превосходить 1.

Так как $Ax\_{A}=λ\_{A}x\_{A}$, то $\lim\_{k\to \infty }A^{k}x\_{A}=\lim\_{k\to \infty }λ\_{A}^{k}x\_{A}=0.$ $x\_{A}>0, A^{k}\geq 0=> \lim\_{k\to \infty }A^{k}=0$.

Теперь рассмотрим $\left(I-A\right)\left(I+A+A^{2}+…+A^{k-1}\right)=I-A^{k-1}$. Если существует предел правой части, то существует предел и левой, то есть $(I-A)\sum\_{k=0}^{\infty }A^{k}=I$. Получается, матрица $(I - A)$ невырождена и ряд $\sum\_{k=0}^{\infty }A^{k}$сходится.

Имеем $\sum\_{k=0}^{\infty }A^{k}=(I-A)^{-1}$. $A^{k}\geq 0$, а значит $(I-A)^{-1}$ тоже неотрицательно. Из этого следует, что вектор $x=(I-A)^{-1}c$, являющийся решением модели Леонтьева, существует и неотрицателен для любого вектора конечного спроса. Это и означает продуктивность модели Леонтьева.