**Тихонов Михаил, 511 группа**

**Обоснование закона всемирного тяготения**

Движение небесных тел интересовало ученых задолго до Ньютона. Выдвигались различные гипотезы, от совершенно фантастических, до достаточно близких к реальности. Важным среди таких изысканий представляется находка Иоганна Кеплера. Изучая движения небесных тел, он первым получил специфику их движения и сформулировал данные наблюдения в виде 3-х законов. Но предполагалось, что движение небесных тел невозможно описать земными законами механики.

Именно Ньютон выдвинул предположение о том, что законы движения одинаковы как на Земле, так и в небесных сферах. Это и позволило ему получить математическое обоснование закона всемирного тяготения.

Для движения небесных тел должны выполняться законы Кеплера:

1. Небесные тела движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.
2. За равные промежутки времени радиус-векторы небесных тел покрывают равные площади.
3. Кубы больших осей орбит небесных тел пропорциональны квадратам периодов их обращения.

Сначала рассмотрим движения, потенциальная энергия в которых является однородной функцией координат и найдем степень однородности для того, чтобы функция удовлетворяла 3-му закону Кеплера.

Чтобы потенциальная энергия была однородной, необходимо, чтобы выполнялось , где некоторая константа, а степень однородности.

Произведем замены вида . Эти замены означают изменения всех координат частиц системы в одинаковое число раз, или, другими словами, переход к другим геометрически подобным траекториям. Подставим в выражение для полной энергии замкнутой системы материальных точек:



Можно заметить, что получено выражение . Это значит, что уравнения движения имеют один и тот же вид в старых и новых переменных. Посмотрим, как относятся времена движения по этим траекториям:. По 3 закону Кеплера квадраты отношения периодов пропорциональны кубам линейных размеров траекторий, то есть в данном случае: 

Таким образом, согласно закону Кеплера потенциальная энергия является однородной функцией степени -1.

Учитывая полученную структуру потенциальной энергии получим закон тяготения. Для этого рассмотрим задачу двух тел. Пусть дана замкнутая механическая система, состоящая из двух материальных точек с массами , находящиеся в однородном поле. Потенциальная энергия этих тел, в силу однородности поля, зависит только от их взаимного расположения. Полная энергия системы может быть записана в следующем виде:

**

Поместив начало отсчета в центр инерции системы, получим , то есть вся система покоится как целое.  - вектор взаимного расположения точек системы. Выразим через него  и : Подставим полученные вектора в выражение для полной энергии:



Таким образом получено выражение для полной энергии материальной точки с массой  и скоростью , которая движется в поле с потенциальной энергией U(r). Получается, что задача о взаимодействии двух тел сводится к задаче о движении массы во внешнем центральном поле. Поскольку поле центрально, то вектор M момента определен относительно центра поля и траектория движения тела постоянно находится в одной плоскости, перпендикулярной вектору M.

Введем полярные координаты в этой плоскости с началом в центре поля и запишем в них полную энергию системы:



Обозначим за ds дифференциал площади сектора, образованного радиус-вектором движущейся точки и элементом дуги траектории, пройденной этим вектором. Найдем пройденную радиус-вектором площадь:

Получили, что площадь пропорциональна времени, то есть в точности 2-й закон Кеплера.

Вспомним, что из 3-го закона Кеплера было получено значение степени однородности потенциальной энергии. Учитывая это, потенциальная энергия представима в виде . Будем использовать величину такую что . Тогда .Получается, если поменять массы местами, то потенциальная энергия не изменится и коэффициент c и функция g – симметричны:

Если взять в качестве функции потенциальной энергии однородную, то есть изменение массы одного из тел в  раз приводит к изменению силы взаимного притяжения в те жераз, то:



Это значит, что  не зависит от , не зависит от , а в силу симметрии и от . То есть . Экспериментально было установлено, что . Эта постоянная характеризует силу притяжения 2-х единичных масс, помещенных на единичном расстоянии друг от друга.

Теперь можно сформулировать **закон всемирного тяготения**: две материальные точки, имеющие массы и , помещенные на расстояние друг от друга, притягивают друг друга с силой, прямо пропорциональной произведению масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:







**Доказательство теоремы о продуктивности матрицы в модели Леонтьева**

Рассмотрим экономику, в которой производство разделено на n отраслей. Каждая отрасль производит свой уникальный тип продукта. В процессе производства отраслям необходимо использовать некоторые продукты других отраслей. Предположим, что технология производства не меняется в течение некоторого времени.

Рассмотрим эту экономическую систему в некоторый момент времени t:

…

… … … …

…

…

Где – общий объем продукции, произведенный i-й отраслью, - объем продукции i-й отрасли, который не был использован для производства товаров других отраслей и - объем продукции i-й отрасли, который был использован в производстве j-й отраслью.

Используя полученную таблицу можно получить уравнение баланса:



 - коэффициент прямых затрат, то есть количество продукта отрасли i, которое необходимо использовать отрасли j для производства одной единицы продукции.

Матрица А = (), составленная из коэффициентов прямых затрат называется технологической матрицей. Пусть  - вектор валового выпуска. Предположим, что производство линейно, то есть в процессе выпуска вектора х будет израсходовано продукции i-й отрасли. Кроме того, задан вектор конечного потребления c, показывающий, какой объем продукции должен быть выделен каждой отраслью на продажу. Требуется найти положительный вектор валового выпуска, который при заданной технологической матрице A удовлетворял конечному потреблению. Другими словами, необходимо решить уравнение x – Ax = c, x ≥ 0, при заданных матрице A и векторе c. Эта система называется моделью Леонтьева. Если для любого неотрицательного вектора конечного спроса существует решение этой системы, то модель Леонтьева и соответствующая ей матрица A называются продуктивными.

Для матрицы A введем величину , равную наибольшему положительному собственному значению матрицы. Ему соответствует собственный вектор .

Теорема Фробениуса-Перрона Пусть A – неразложимая неотрицательная матрица, то есть такая, что одновременной перестановкой строк и столбцов ее нельзя привести к виду и Тогда:

1. Она имеет .
2. соответствует собственный вектор .
3. Найдется такой вектор , что

Необходимое и достаточное условие продуктивности модели Леонтьева Модель Леонтьева с технологической матрицей A продуктивна тогда и только тогда, когда .

Необходимость: Предположим, что модель Леонтьева продуктивна. В качестве вектора конечного спроса c возьмем произвольный положительный вектор. Так как модель продуктивна, то найдется такой неотрицательный вектор x, что будет выполнено равенство x – Ax = c, откуда x > Ax. Умножим полученное неравенство на вектор из теоремы Фробениуса-Перрона. Получаем . Так как , то должно быть меньше 1.

Достаточность: Поскольку , из определения следует, что все собственные значения матрицы A не будут превосходить 1.

Так как , то .

Теперь рассмотрим . Если существует предел правой части, то существует предел и левой, то есть . Получается, матрица невырождена и ряд сходится.

Имеем . , а значит тоже неотрицательно. Из этого следует, что вектор , являющийся решением модели Леонтьева, существует и неотрицателен для любого вектора конечного спроса. Это и означает продуктивность модели Леонтьева.